

# مبانی احتمال

(ویرایش هشتم)

نویسنده:

شلدون راس

مترجم:

دکتر علی اکبر عالم زاده

انتشارات نیاز دانش

۱۳۹۳

## پیشگفتار مترجم

این کتاب اثر معروف شلدون راس است که به فارسی ترجمه و تقدیم می‌شود. کتاب از مقدمات، فصلها، و ضمایم تشکیل شده است. در مقدمات پیشگفتار مترجم، پیشگفتار مؤلف، و فهرست مطالب آمده است. سپس فصلها آغاز می‌شوند. فصل ۱ به آنالیز ترکیباتی اختصاص دارد. فصل ۲ به اصول موضوع احتمال می‌پردازد. در فصل ۳ احتمال شرطی و استقلال مطرح می‌شوند. فصل ۴ متغیرهای تصادفی مورد بحث قرار می‌گیرند. فصل ۵ متغیرهای تصادفی پیوسته مطرح می‌شوند. فصل ۶ متغیرهای تصادفی با توزیع توأم مورد بحث قرار می‌گیرد. در فصل ۷ به خواص امید می‌پردازیم. در فصل ۸ قضایای حدی را خواهیم دید. فصل ۹ چند مبحث دیگر در احتمال را مشاهده می‌کنیم. و در فصل ۱۰ به شبیه‌سازی خواهیم پرداخت. سپس ضمایم آغاز می‌شوند که عبارتند از جوابهای مسائل انتخابی، جوابهای مسائل و تمرینهای خودآزمایی، واژه‌نامه فارسی به انگلیسی، و واژه‌نامه انگلیسی به فارسی. این کتاب در نوع خود کم‌نظیر است و می‌تواند در بسیاری از موارد به عنوان کتاب درسی احتمال مورد استفاده قرار گیرد.

دکتر علی اکبر عالم‌زاده

۱۳۹۳

## پیشگفتار مؤلف

«نظریهٔ احتمال حس مشترکی است که به محاسبه منجر شده است. به کمک این علم می‌توان افکار معقول را اغلب بدون ارزیابی با فراست دریافت. جالب اینجاست که این علم، که ریشه در بازیهای شانس دارد، مهمترین هدف در معرفت انسان است. مهمترین مسائل حیات اغلب فقط مسائل احتمال می‌باشند. اینها گفته‌های پیرسیمون مارکیز در لاپلاس<sup>۱</sup> ریاضیدان و ستاره‌شناس شه‌میر فرانسوی (نیوتن<sup>۲</sup> فرانسه) می‌باشد. با آنکه اغلب افراد فکر می‌کنند که مارکیز معروف که خود یکی از بانیان مهم گسترش احتمال است به نوعی اغراق گفته است، نظریهٔ احتمال ابزار مهمی برای تقریباً همهٔ علما، مهندسان، پزشکان، قضات، و صنعت‌گران می‌باشد. در واقع، افراد روشن فکر نمی‌پرسند «آیا چنین است؟» بلکه می‌پرسند «احتمال چیست که چنین است؟»

این کتاب یک آشنایی مقدماتی با نظریهٔ احتمال برای شاگردان ریاضی، آمار، مهندسی، و علوم (از جمله علوم کامپیوتر، زیست‌شناسی، علوم اجتماعی، مدیریت) که دانش لازم از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را دارند ما سعی داریم نه فقط ریاضیات نظریهٔ احتمال بلکه از طریق مثالهای متعدد بسیاری از کاربردهای این مبحث را ارائه دهیم.

فصل ۱ اصول اساسی آنالیز ترکیباتی که در محاسبهٔ احتمالات مفیدترین اند عرضه می‌کند.

فصل ۲ به اصول موضوع نظریهٔ احتمال پرداخته و طرز استفاده از آنها در محاسبهٔ احتمالات مورد نظر را نشان می‌دهد.

فصل ۳ مباحث بسیار مهم احتمال شرطی و استقلال پیشامدها را مطرح می‌سازد. با یک سری مثال طرز ورود احتمالات شرطی به بازی را نه فقط وقتی اطلاعات ناقص است بلکه به عنوان ابزاری در محاسبهٔ آسانتر احتمالات حتی وقتی اطلاعات ناقص نیز وجود ندارد را توضیح می‌دهیم. در فصل ۷ این روش بسیار مهم به دست آوردن احتمالات به وسیلهٔ «شرط‌گذاری» برای به دست آوردن احتمالات مجدداً ظاهر می‌شود.

مفهوم متغیرهای تصادفی در فصلهای ۴، ۵، و ۶ معرفی می‌شود. متغیرهای تصادفی گسسته در فصل ۴، متغیرهای تصادفی پیوسته در فصل ۵، و متغیرهای تصادفی با توزیع توأم در فصل ۶ مطرح می‌شوند. مفاهیم مهم امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی در فصلهای ۴ و ۵ معرفی شده و سپس این کمیات برای انواع بسیاری از متغیرهای تصادفی معین خواهند شد.

در فصل ۷ خواص دیگری از امید ریاضی مطرح می‌شوند. مثالهای بسیاری که سودمندی این نتیجه که امید ریاضی مجموع متغیرهای تصادفی مساوی مجموع اسیدهای ریاضی آنهاست ارائه شده‌اند. در این فصل بخشهایی راجع به امید شرطی، به انضمام سودمندی‌اش در پیش‌بینی، و توابع مولد لحظه‌ای در این فصل گنجانده شده است. به علاوه، بخش آخر توزیع نرمال چندمتغیره را معرفی کرده و برهان ساده‌ای از توزیع توأم میانگین نمونه و واریانس نمونه یک نمونه از یک توزیع نرمال را ارائه می‌دهد.

---

1. Pirre Simon Marquis de laplace  
2. Newton

فصل ۸ نتایج نظری مهم نظریه احتمال را ارائه می‌دهد. به خصوص، قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی را ثابت می‌کنیم. برهان ما از قانون قوی نسبتاً ساده است که در آن فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی گشتاور چهارم متناهی دارند و در برهان قضیه حد مرکزی ما قضیه پیوستگی لدی فرض خواهد بود. این فصل نامساویهای احتمال مانند نامساوی مارکف، نامساوی چبیشف، و کرانههای چرنف را نیز عرضه خواهد کرد. بخش آخر فصل ۸ برای خطای ناشی از تقریب احتمال مجموع متغیرهای تصادفی برنولی مستقل به وسیله احتمال نظیر یک متغیر تصادفی پواسون یا همان امید ریاضی یک کران به دست می‌دهد.

فصل ۹ به چند مبحث دیگر مانند زنجیرههای مارکف، فرایند پواسون، و آشنایی با نظریه اطلاعات و رمز پرداخته و فصل ۱۰ شبیه سازی را مطرح خواهد کرد.

همانند ویرایش قبل، در پایان هر فصل سه مجموعه تمرینات داریم. این مجموعه تمرینات با عنوان **مسائل، تمرینات نظری، و مسائل و تمرینهای خودآزمایی** مشخص شده‌اند. مجموعه تمرینات آخر، که جوابهای کاملشان در جوابهای مسائل و تمرینهای خودآزمایی آمده‌اند، برای کمک به دانشجویان در درک و آمادگی در امتحان طراحی شده‌اند.

## تغییرات در ویرایش جدید

ویرایش هشتم تکامل ویرایشهای قبل است. این ویرایش مسائل، تمرینات، و مطالب جدیدی را شامل شده که جالب بوده و در ساخت شهود شاگرد در احتمال سودمندند. در تجسم این اهداف مثال ۵ تا از فصل ۱ راجع به مسابقات حذفی و مثالهای ۵ د و ۵ خ از فصل ۷ راجع به مسائل ورشکستگی چند قمار باز مفید می‌باشند.

یک تغییر کلیدی در ویرایش جاری آن است که این نتیجه مهم که امید مجموع متغیرهای تصادفی مساوی امیدهاست.

در فصل ۴ (به جای فصل ۷ مانند ویرایشهای قبل) عرضه می‌شود. یک برهان جدید و مقدماتی این نتیجه وقتی فضای نمونه آزمایش احتمال متناهی است در این فصل داده شده است.

تغییر دیگر بسط بخش ۳/۶ که با مجموع متغیرهای تصادفی مستقل سروکار دارد. بخش ۱/۳/۶ بخش جدیدی است که در آن توزیع مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع یکنواخت یکسان را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از نتایجمان نشان می‌دهیم که امید ریاضی اعداد تصادفی لازم برای افزودن به مجموع آنها که از ۱ متجاوز شود برابر  $e$  می‌باشد. بخش ۵/۳/۶ بخش جدیدی است که در آن توزیع مجموع متغیرهای تصادفی هندسی مستقل با میانگین مختلف را به دست می‌آوریم.

## تشکر و قدردانی

از حسین همدانی<sup>۱</sup> به خاطر تصحیح دقیق متن سپاسگزارم. همچنین از افراد زیر که وقت گذاشته

---

<sup>1</sup> Hossein Hamedani

و برای بهبود متن تذکراتی داده‌اند قدردانی می‌نمایم: امیر اردستانی<sup>۱</sup> از دانشگاه تهران؛ جو بلیتس اشتاین<sup>۲</sup> از دانشگاه هاروارد، پیتر نویس<sup>۳</sup> از دانشگاه لاسان؛ جوزف میچل<sup>۴</sup> از سانی، استونی بوک؛ آلن چامبلس<sup>۵</sup>، اکچوئری؛ رابرت کرینر<sup>۶</sup>؛ اسراییل دیوید<sup>۷</sup> از دانشگاه بن گوریون؛ تی. لیم<sup>۸</sup>، از دانشگاه جرج میسون؛ وی چن<sup>۹</sup>، روجرز؛ دی. مونراد<sup>۱۰</sup>، از دانشگاه ایلینوی؛ دبلیو. روزنبرگر<sup>۱۱</sup> از دانشگاه جرج میسون؛ ای. یونیدس<sup>۱۲</sup> از دانشگاه میشیگان؛ ج. کورینو<sup>۱۳</sup> از کالج لافایت؛ تی. سپالین<sup>۱۴</sup>، از دانشگاه ویسکونزین.

در پایان مایلم از منتقدان زیر به خاطر نظرات بسیار مفیدشان تشکر نمایم. منتقدان ویرایش هشتم با ستاره مشخص شده‌اند.

K. B. Athreya, Iowa State University \* Edward Ionides,  
Richard  
Mark Huler, Duke

- 
1. Amir Ardestani
  2. Joe Blits Etein
  3. Peter Nuesch
  4. Jozeph Mitchell
  5. Alan Chambless
  6. Robert Kriner
  7. Israel David
  8. T. Lim
  9. Wei Chen
  10. Monrad
  11. W. Rozenberger
  12. E. Ionides
  13. J. Corvino
  14. T. Seppalainen

تقدیم بہ دخترم

ہلیا عالم زاده

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱۳	فصل ۱ / آنالیز ترکیباتی .....
۱۳	۱-۱ آشنایی .....
۱۴	۲-۱ اصل اساسی شمارش .....
۱۵	۳-۱ جایگشت‌ها .....
۱۸	۴-۱ ترکیبات .....
۲۲	۵-۱ ضرایب بسجمله‌ای .....
۲۶	۶-۱ تعداد جوابهای صحیح معادلات .....
۲۹	خلاصه مطالب .....
۲۹	مسائل .....
۳۳	تمرینهای نظری .....
۳۷	مسائل و تمرینهای خودآزمایی .....
۴۱	فصل ۲ / اصول موضوع احتمال .....
۴۱	۱-۲ آشنایی .....
۴۱	۲-۲ فضای نمونه و پیشامدها .....
۴۶	۳-۲ اصول موضوع احتمال .....
۴۸	۴-۲ چند حکم ساده .....
۵۴	۵-۲ فضاهای نمونه با نتایج متساوی‌الاحتمال .....
۶۷	۶-۲ احتمال به‌عنوان یک تابع مجموعه‌ای پیوسته .....
۷۲	۷-۲ احتمال به‌عنوان سنجشی از باور .....
۷۳	خلاصه مطالب .....
۷۴	مسائل .....
۸۲	تمرینهای نظری .....
۸۵	مسائل و تمرینهای خودآزمایی .....
۸۹	فصل ۳ / احتمال شرطی و استقلال .....
۸۹	۱-۳ آشنایی .....
۸۹	۲-۳ احتمالهای شرطی .....
۹۷	۳-۳ فرمول بیز .....
۱۱۴	۴-۳ پیشامدهای مستقل .....

۱۳۱	.....	۵-۳ $P(0 F)$ یک احتمال است
۱۴۰	.....	خلاصه مطالب
۱۴۲	.....	مسائل
۱۵۸	.....	تمرینهای نظری
۱۶۴	.....	مسائل و تمرینهای خودآزمایی

#### فصل ۴ / متغیرهای تصادفی ..... ۱۶۹

۱۶۹	.....	متغیرهای تصادفی
۱۶۹	.....	۱-۴ متغیرهای تصادفی
۱۷۶	.....	۲-۴ متغیرهای تصادفی گسسته
۱۷۸	.....	۳-۴ امید ریاضی
۱۸۲	.....	۴-۴ امید تابع یک متغیر تصادفی
۱۸۶	.....	۵-۴ واریانس
۱۸۹	.....	۶-۴ متغیرهای تصادفی برنولی و دوجمله‌ای
۱۹۴	.....	۱-۶-۴ خواص متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای
۱۹۸	.....	۲-۶-۴ محاسبه تابع توزیع دوجمله‌ای
۱۹۹	.....	۷-۴ متغیر تصادفی پواسون
۲۱۳	.....	۱-۷-۴ محاسبه تابع توزیع پواسون
۲۱۴	.....	۸-۴ توزیعهای احتمال گسسته دیگر
۲۱۴	.....	۱-۸-۴ متغیر تصادفی هندسی
۲۱۶	.....	۲-۸-۴ متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی
۲۱۹	.....	۳-۸-۴ متغیر تصادفی ابرهندسی
۲۲۴	.....	۴-۸-۴ توزیع زتا (یا زیپف)
۲۳۰	.....	۹-۴ امید ریاضی مجموع متغیرهای تصادفی
۲۳۰	.....	۱۰-۴ خواص تابع توزیع توأم
۲۳۲	.....	خلاصه مطالب
۲۳۴	.....	مسائل
۲۴۷	.....	تمرینهای نظری
۲۵۴	.....	مسائل و تمرینهای خودآزمایی

#### فصل ۵ / متغیرهای تصادفی پیوسته ..... ۲۵۹

۲۵۹	.....	۱-۵ آشنایی
۲۶۳	.....	۲-۵ امید و واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته



۲۶۹	۳-۵ متغیر تصادفی یکنواخت.....
۲۷۳	۴-۵ متغیرهای تصادفی نرمال.....
۲۸۱	۱-۴-۵ تقریب نرمال به توزیع دو جمله‌ای.....
۲۸۶	۵-۵ متغیرهای تصادفی نمایی.....
۲۹۱	۱-۵-۵ توابع میزان خطر.....
۲۹۳	۶-۵ توزیعهای پیوسته دیگر.....
۲۹۳	۱-۶-۵ توزیع گاما.....
۲۹۵	۲-۶-۵ توزیع ویبول.....
۲۹۶	۳-۶-۵ توزیع کشی.....
۲۹۸	۴-۶-۵ توزیع بتا.....
۲۹۹	۷-۵ توزیع تابع از یک متغیر تصادفی.....
۳۰۲	خلاصه مطالب.....
۳۰۴	مسائل.....
۳۱۰	تمرینهای نظری.....
۳۱۵	مسائل و تمرینهای خودآزمایی.....

#### فصل ۶ / متغیرهای تصادفی با توزیع توأم..... ۳۲۱

۳۲۱	۱-۶ توابع توزیع توأم.....
۳۳۱	۲-۶ متغیرهای تصادفی مستقل.....
۳۴۳	۳-۶ مجموعهای متغیرهای تصادفی مستقل است.....
۳۴۳	۱-۳-۶ متغیرهای تصادفی یکنواخت با توزیع یکسان.....
۳۴۶	۲-۳-۶ متغیرهای تصادفی گاما.....
۳۴۸	۳-۳-۶ متغیرهای تصادفی نرمال.....
۳۵۲	۴-۳-۶ متغیرهای تصادفی پوانس و دو جمله‌ای.....
۳۵۴	۵-۳-۶ متغیرهای تصادفی هندسی.....
۳۵۷	۴-۶ توزیعهای شرطی: حالت گسسته.....
۳۶۰	۵-۶ توزیعهای شرطی: حالت پیوسته.....
۳۶۶	۶-۶ آمارهای ترتیبی.....
۳۷۰	۷-۶ توزیع احتمال توأم توابع متغیرهای تصادفی.....
۳۷۹	۸-۶ متغیرهای تصادفی قابل تبادل.....
۳۸۰	تبصره.....
۳۸۲	خلاصه مطالب.....
۳۸۴	مسائل.....

۳۹۲	تمرینهای نظری
۳۹۷	مسائل و تمرینهای خودآزمایی

### فصل ۷ / خواص امید ..... ۴۰۳

۴۰۳	۱-۷ آشنایی
۴۰۴	۲-۷ امید مجموعهای متغیرهای تصادفی
۴۱۸	۱-۲-۷ به دست آوردن کرانها از امیدها به وسیله روش احتمالاتی
۴۲۱	۲-۲-۷ اتحاد ماکزیمم - مینیمم
۴۲۴	۳-۷ گشتاورهای تعداد پیشامدهایی که رخ می دهند
۴۳۳	۴-۷ کوواریانس، واریانس مجموعها، و همبستگی ها
۴۴۳	۵-۷ امید شرطی
۴۴۳	۱-۵-۷ چند تعریف
۴۴۵	۲-۵-۷ محاسبه امیدها به وسیله شرط گذاری
۴۵۸	۳-۵-۷ محاسبه احتمالها به وسیله شرط گذاری
۴۶۲	۴-۵-۷ واریانس شرطی
۴۶۴	۶-۷ امید شرطی و پیشگویی
۴۶۹	۷-۷ توابع مولد گشتاور
۴۷۹	۱-۷-۷ توابع مولد گشتاور توأم
۴۸۲	۸-۷ خواص دیگر متغیرهای تصادفی نرمال
۴۸۲	۱-۸-۷ توزیع نرمال چندمتغیره
۴۸۴	۲-۸-۷ توزیع توأم میانگین نمونه و واریانس نمونه
۴۸۶	۹-۷ تعریف کلی امید
۴۸۸	خلاصه مطالب
۴۹۱	مسائل
۵۰۴	تمرینهای نظری
۵۱۴	مسائل و تمرینهای خودآزمایی

### فصل ۸ / قضایای حدی ..... ۵۲۱

۵۲۱	۱-۸ آشنایی
۵۲۱	۲-۸ نامساوی چبیشف و قانون ضعیف اعداد بزرگ
۵۲۵	۳-۸ قضیه حد مرکزی
۵۳۵	۴-۸ قانون قوی اعداد بزرگ
۵۳۸	۵-۸ نامساویهای دیگر
۵۴۷	۶-۸ کران گذاری احتمال خطا وقتی مجموع متغیرهای تصادفی برنولی

۵۵۰	..... خلاصه مطالب
۵۵۰	..... مسائل
۵۵۳	..... تمرینهای نظری
۵۵۶	..... مسائل و تمرینهای خودآزمایی

### فصل ۹ / مباحثی دیگر در احتمال ..... ۵۵۹

۵۵۹	..... ۱-۹ فرایند پواسون
۵۶۲	..... ۲-۹ زنجیرهای مارکف
۵۶۸	..... ۳-۹ تعجب، عدم قطعیت، و آنتروپی
۵۷۲	..... ۴-۹ نظریه رمز و آنتروپی
۵۷۹	..... خلاصه مطالب
۵۸۰	..... تمرینهای نظری
۵۸۲	..... مسائل و تمرینهای خودآزمایی
۵۸۳	..... مرجعها

### فصل ۱۰ / شبیه‌سازی ..... ۵۸۵

۵۸۵	..... ۱-۱۰ آشنایی
۵۸۸	..... ۲-۱۰ روشهای کلی برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پیوسته
۵۸۸	..... ۱-۲-۱۰ روش تبدیل معکوس
۵۸۹	..... ۲-۲-۱۰ روش طرد
۵۹۵	..... ۳-۱۰ شبیه‌سازی از توزیعهای گسسته
۵۹۸	..... ۴-۱۰ روشهای تقلیل واریانس
۵۹۹	..... ۱-۴-۱۰ به‌کارگیری متغیرهای متضاد
۵۹۹	..... ۲-۴-۱۰ تقلیل واریانس به‌وسیله شرط‌گذاری
۶۰۱	..... ۳-۴-۱۰ متغیرهای کنترل
۶۰۲	..... خلاصه مطالب
۶۰۳	..... مسائل
۶۰۶	..... مسائل و تمرینهای خودآزمایی
۶۰۶	..... مرجعها
۶۰۷	..... واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۱۲	..... واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

## فصل ۱

### آنالیز ترکیباتی

۱-۱ آشنایی

۲-۱ اصل اساسی شمارش

۳-۱ جایگشت‌ها

۴-۱ ترکیبات

۵-۱ ضرایب بسجمله‌ای

۶-۱ تعداد جواب‌های جمیع معادلات

۱-۱ آشنایی

ابتدا یک مسئله جالب در احتمال را مطرح می‌کنیم. یک سیستم ارتباطات از  $n$  آنتن مشابه تشکیل شده است که در یک خط قرار دارند. این سیستم می‌تواند همهٔ علایم ورودی را دریافت کند و تا زمانی که دو آنتن متوالی از کار نیفتاده باشند تابعی خوانده می‌شود. اگر درست  $m$  تا از  $n$  آنتن خراب باشند، احتمال اینکه سیستم تابعی باشد چقدر است؟ مثلاً در حالت خاص  $n = 4$  و  $m = 2$ ،  $6$  طرح خواهیم داشت:

۰ ۱ ۱ ۰  
۰ ۱ ۰ ۱  
۱ ۰ ۱ ۰  
۰ ۰ ۱ ۱  
۱ ۰ ۰ ۱  
۱ ۱ ۰ ۰

که در آن ۱ یعنی آنتن کار می‌کند و ۰ یعنی آنتن خراب است. چون سیستم در ۳ آرایش اول تابعی